

1. Elektrostatik

1. Elektrostatik



Begriffsherkunft:

Griechisch *ἤλεκτρον* (*elektron*) = Bernstein, an dem Elektrizität erstmals beobachtet wurde

Heute: Elektrizität ist in unserem Leben allgegenwärtig (Elektrizitätsnetz, Nachrichtentechnik, Informationsverarbeitung, ...)



Elektrizität ist nicht (wie z.B. die Thermodynamik) mit der Mechanik erklärbar,

Elektrizität ist ein Phänomen ganz eigener Art.

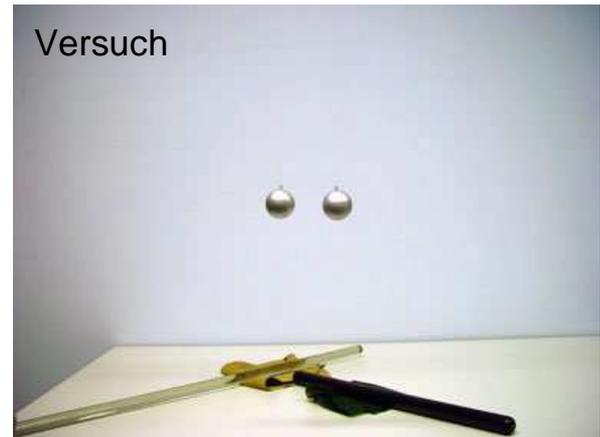
Aber viele Aspekte sind uns bereits bekannt: Potential, Fernwirkung, Felder, ...

Viele Kräfte des täglichen Lebens sind elektromagnetisch!

Reibungselektrizität

Reibt man zwei ungeladene Körper aus verschiedenem Material aneinander, so gehen Elektronen vom einen auf den anderen über.

Nachdem man etwas Ladung durch Berühren/Abstreifen vom Stab auf die Kugeln gebracht hat, werden die Kugeln vom Stab abgestoßen. Auch die Kugeln untereinander stoßen sich dann ab.



1.1. Elektrische Ladung



- Körper haben außer ihrer Masse auch eine **elektrische Ladung**
Diese kann positiv, negativ oder auch null sein.
- Die Einheit der Ladung ist das **Coulomb**:

$$[Q] = 1 \text{ C}$$

- Die Ladung ist quantisiert, d.h. sie tritt in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung auf:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Beispiele:

Ladung eines Elektrons: $-e$,
eines Protons: $+e$
eines α -Teilchens: $+2e$

- Gemessen wurde die Elementarladung von R.A. Millikan (1910)

Versuch: Elektrometer

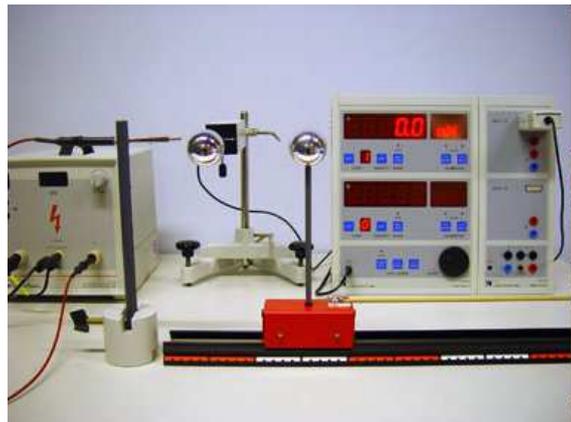
Über die Hartgummi-/Glasstäbe wird Ladung auf den Elektrometerkopf gebracht, wobei man die Ladung des Glasstabes (positiv) mit der des Hartgummistabes (negativ) aufheben kann.

Die Ladung verteilt sich auf den Zeiger des Elektrometers und dessen Halterung. Beide stoßen sich ab. Der Zeiger steigt auf der Skala hoch, bis das von der Schwerkraft erzeugte Drehmoment ebenso viel Kraft auf den Zeiger ausübt, wie die elektrostatische Kraft. Die Skala ist in Werte der elektrischen Spannung eingeteilt.



Versuch: Coulombsches Gesetz

1. Messung der Coulomb-Kraft von der Höhe der elektrischen Ladung ($Q \sim U$)
2. Abstandsabhängigkeit der Coulomb-Kraft bei fester Ladung



- Zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 wirkt eine Kraft entlang ihrer Verbindungslinie, die mit dem **Quadrat ihres Abstands r** abnimmt:

Coulomb-Kraft:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_{12}$$

$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- Im SI-System: $\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{J m})$ (Dielektrizitätskonstante)
- **Beachte:** F_{12} ist die Kraft, die Ladung 2 auf Ladung 1 ausübt.

Actio = Reactio: $F_{12} = -F_{21}$

Gleichartige Ladungen stoßen sich ab
unterschiedliche Ladungen ziehen sich an

Achtung:

In der Literatur findet man verschiedene Einheitensysteme.
Die beiden Wichtigsten sind:

cgs-System:

- Einheit Ladung [Q] = 1 cm dyn^{1/2}
(1 dyn = 1 g cm / s²)
- $\epsilon_0 = 1 / (4 \pi)$
- Coulomb-Kraft $\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_{12}$

SI-System:

- Einheit Ladung [Q] = 1 C
- $\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{J m})$
- Coulomb-Kraft $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_{12}$

Einen detaillierten Überblick der versch. Systeme findet man z.B. in
J. Jackson: Classical Electrodynamics, Wiley

Wir verwenden in dieser Vorlesung **ausschließlich** das
internationale **SI-Einheitensystem**.

Zwei Protonen in 1 mm Abstand

abstoßende elektrische Kraft:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

$$\approx \frac{1}{4\pi \cdot 8,859 \cdot 10^{-12} \text{Vs/Am}} \left(\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}}{10^{-3} \text{m}} \right)^2 \approx 2,32 \cdot 10^{-22} \text{N}$$

zum Vergleich: anziehende Gravitationskraft:

$$F_g = G \frac{m_p^2}{r^2}$$

$$\approx 6,673 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 / (\text{kg s}^2) \left(\frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}}{10^{-3} \text{m}} \right)^2 \approx 1,84 \cdot 10^{-58} \text{N}$$

→ Die elektrische Kraft ist um viele Größenordnungen stärker, als die Gravitationskraft

1.3. Das elektrische Feld

- $Q_1 = q$ sei eine **Probeladung**, die das von der Ladung $Q_2 = Q$ erzeugte Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ testet.
- Das elektrische Feld leitet sich daraus ab, als Kraft pro Probeladung:

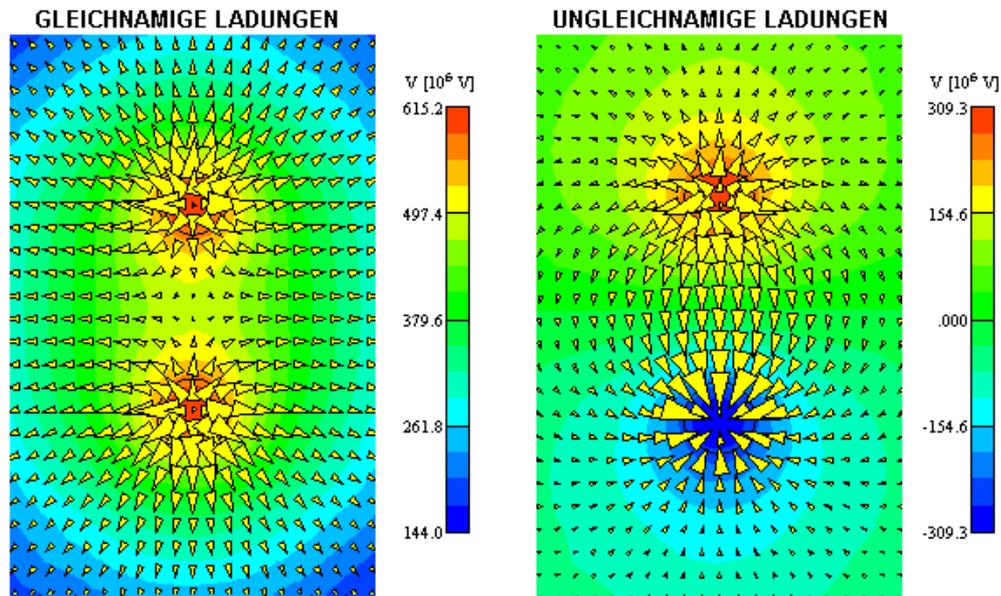
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q}$$

- \vec{E} ist also die **Kraft pro Einheitsladung** $Q = 1 \text{ C}$
- Einheiten:

$$[\vec{E}] = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

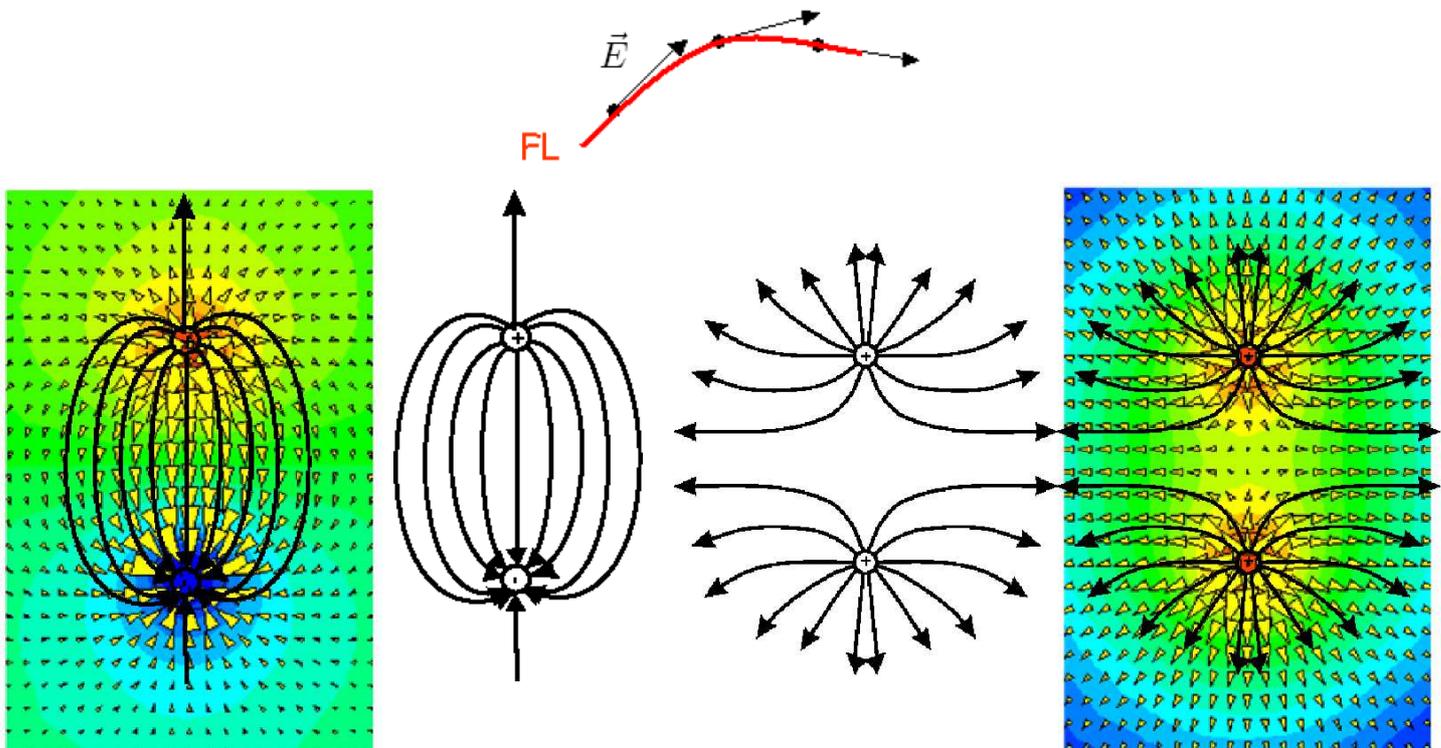
$$1 \text{ V} = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ Nm/C} = 1 \text{ J/C}$$

- Das elektrische Feld ist auch ohne die Probeladung vorhanden, diese dient nur zur Einführung des Konzepts
- Das elektrische Feld ist ein **Vektorfeld**, d.h. an jedem Ort \vec{r} hat es einen bestimmten **Betrag** und eine bestimmte **Richtung**.



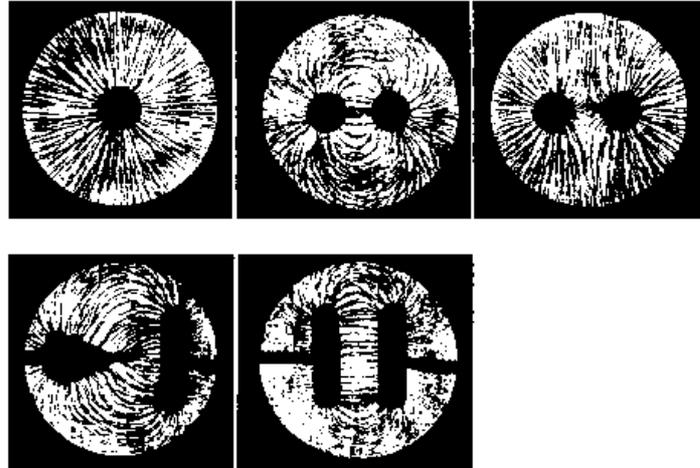
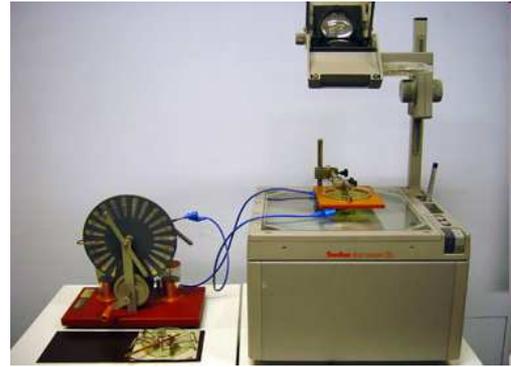
Quelle: http://www.igte.tugraz.at/archive/leoben97/grundlagen/el_feld.htm

- Man kann dieses Feld durch **Feldlinien** veranschaulichen.
- Feldlinien sind Kurven, an denen das elektrische Feld \vec{E} tangential anliegt
- **Feldlinien können sich nie kreuzen!**



Versuch: Elektrische Feldlinien

Das Feldliniengerät wird auf einen Tageslichtprojektor gestellt und an die Influenzmaschine angeschlossen. Man kann verschiedene Elektroden in das Glasschälchen legen und in die Buchsen stecken. Nach Anlegen der Spannung (drehen der Influenzmaschine) bilden die Grießkörnchen zwischen den Elektroden die Feldlinien.



- Das **elektrische Feld einer Punktladung** am Ort \vec{r}_0 ist somit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

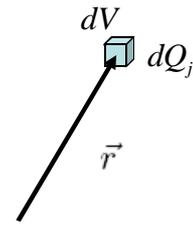
- Ähnlich wie für die Kraft addieren sich auch elektrische Felder mehrerer Punktladungen Q_j zu einem **Gesamtfeld**.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

Man spricht von **Überlagerungs-** oder **Superpositionsprinzip**.

- Im kleinen Volumenelement dV_j am Ort \vec{r} sei die Ladung dQ_j vorhanden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j dV_j \frac{dQ_j}{dV_j} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$



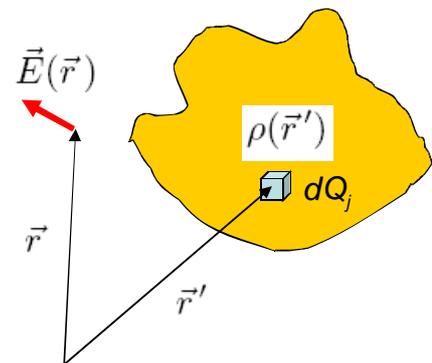
- mit der kontinuierlichen **Ladungsdichte** $\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV}$

und nach Übergang zur Integration: $\sum_j dV_j \rightarrow \int_V d^3r'$
erhält man:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Das ist ein **Volumenintegral**, mit dem man das Feld beliebiger Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ berechnen kann. Das **Volumen** V muss dabei **alle Ladungen einschließen**, also alle Gebiete mit $\rho(\vec{r}) \neq 0$

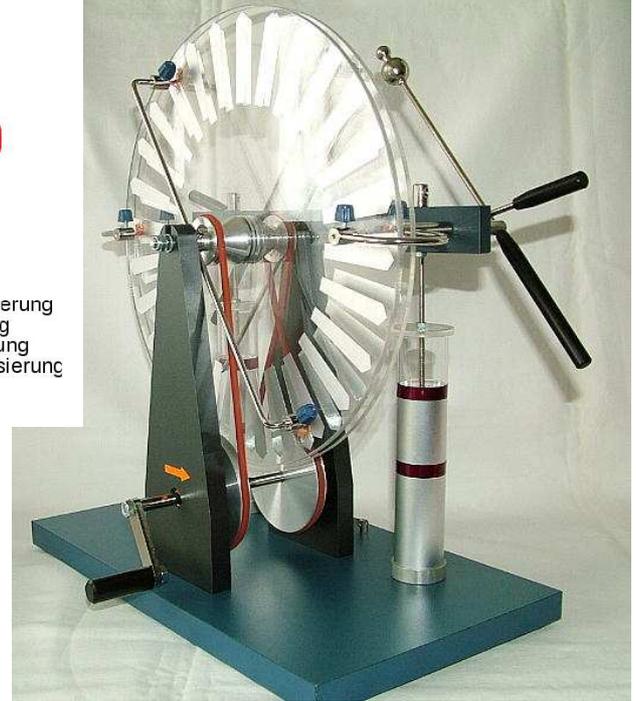
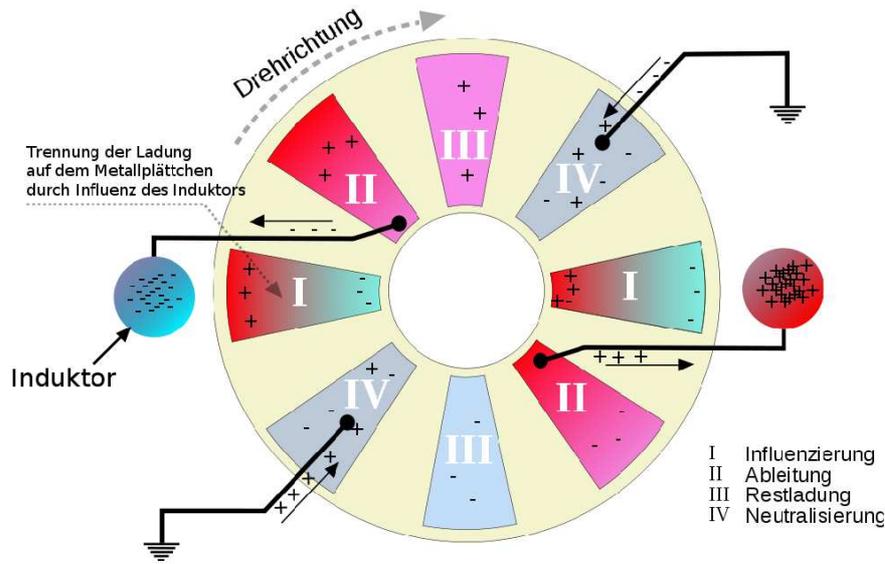
- Genau genommen sind das drei Gleichungen, für die drei Komponenten von $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ am Ort $\vec{r} = (x, y, z)$:



$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dx' \int dy' \int dz' \rho(x', y', z') \cdot \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

und entsprechend für E_y und E_z

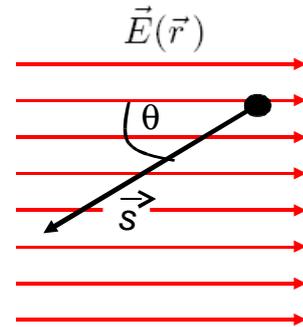
Prinzip Influenzmaschine



1.4. Arbeit im elektrischen Feld

- Bei Bewegungen einer Ladung q im elektrischen Feld muss **Arbeit = Kraft \times Weg** geleistet werden.
- Für ein homogenes E-Feld und entlang einer geradlinigen Wegstrecke s :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = q \vec{E} \cdot \vec{s} \\ = q E s \cos \theta$$

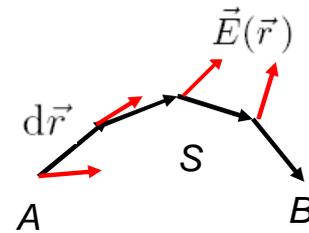


- **Vorzeichenwahl:** $W > 0$ wenn positive Ladung gegen E-Feld-Richtung
- **Spannung U** ist die Arbeit pro Einheitsladung 1 C geleistet wird:

$$U = \frac{W}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Einheit: $[U] = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V}$

Für **beliebigen Weg** S zwischen Punkte A & B
und für **beliebige Feldverteilung** $\vec{E}(\vec{r})$:



- S zerlegbar in infinitesimale Teilstücke $d\vec{r}$
- $\vec{E} = \text{konst.}$ über $d\vec{r}$
- Spannung: $dU = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$

- Arbeit: $dW = q dU = -q \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$U = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- Gesamtarbeit / Spannung entlang S :

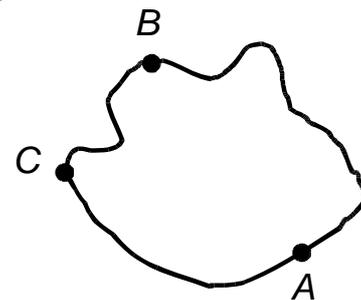
1.5. Potential und Spannung

Ist W nur abhängig vom Start- und Endpunkt A & B ,
nicht aber von der Form des Weges S , so gilt:

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Mit dritten Punkt C gilt:

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$$



Dabei kann **Punkt C** beliebig gewählt werden.

→ U lässt sich darstellen als Differenz:

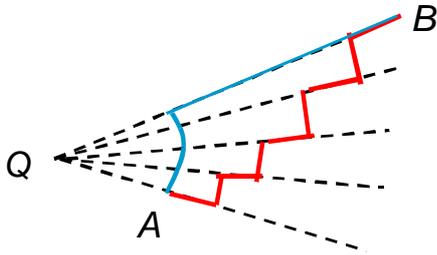
$$U_{AB} = \phi(\vec{r}_A) - \phi(\vec{r}_B)$$

mit dem **Potential des elektrischen Feldes**:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_C}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Frage: Gilt die Wegunabhängigkeit überhaupt?

Betrachten: Coulomb-Feld einer Punktladung:



- Zerlege beliebigen Weg in Teilstücke ds_{\parallel} und ds_{\perp} parallel und senkrecht zu radialen E-Feld.

- Es gilt: $\vec{E} \cdot d\vec{s}_{\perp} = 0$ und $\vec{E} \cdot d\vec{s}_{\parallel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$

- Die Summe der dr ist für alle Wege $= r_A - r_B$

Das Linienintegral entlang eines bel. Radiusstrahls ergibt daher:

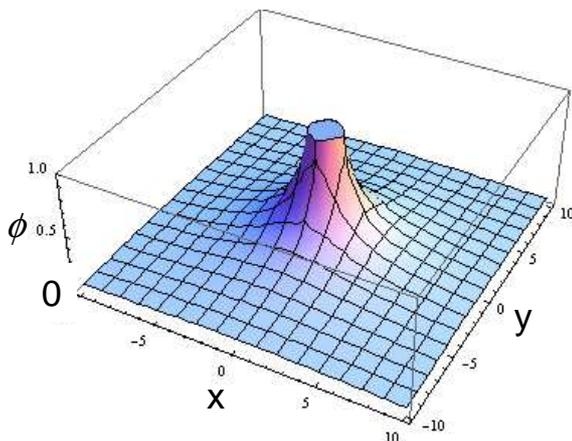
$$-\int_A^B \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Sinnvollerweise setzt man meist $\phi(\infty) = 0$

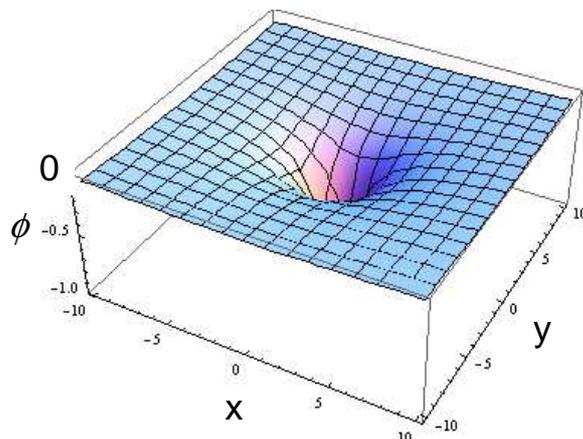
Coulomb-Potential einer Punktladung:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|}$$

abstoßendes Potential:

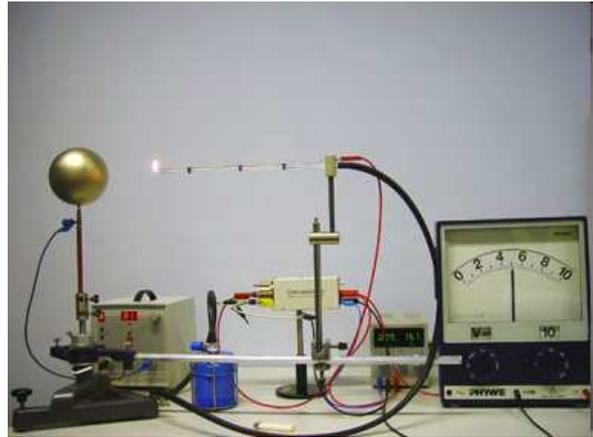


anziehendes Potential:



Versuch: Potentialfeld / Äquipotentialflächen einer geladenen Kugel:

Messreihe Potential vs. Abstand Messsonde:



Überlagerungsprinzip:

Ebenso wie die \vec{E} , addieren sich auch die Potentiale ϕ von Ladungen.

Das Feld einer beliebigen Ladungsverteilung besitzt also auch ein Potential:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Beziehung zwischen Potential und Feldverteilung:

Aus der Definitionsgleichung für das elektrische Potential,

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

folgt, dass die Feldstärke \vec{E} der Gradient von ϕ ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\phi(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

- Flächen, auf denen das Potential konstant ist, heißen **Äquipotentialflächen**.

$$\phi(\vec{r}) = \text{konst.}$$

- Der Gradient (\sim „3D-Ableitung“) ist in diesem Fall 0: $\text{grad } \phi(\vec{r}_{\text{Equipot.}}) = 0$
- Da $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\phi(\vec{r})$,

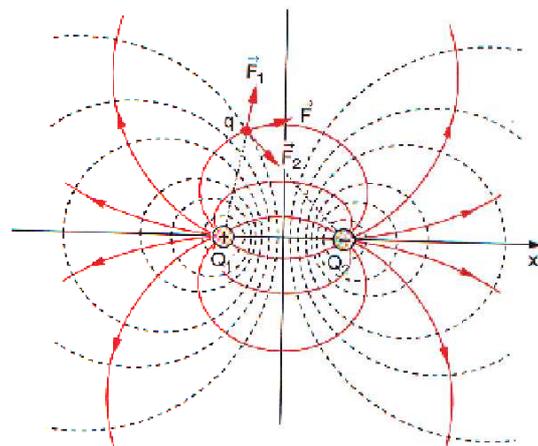
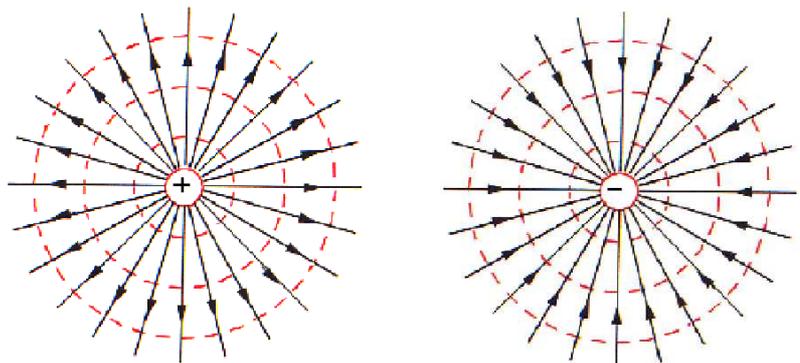
steht das \vec{E} -Feld stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen.

- Zum Verschieben von Ladungen auf Äquipotentialflächen, wird **keine Arbeit** verrichtet oder freigesetzt:

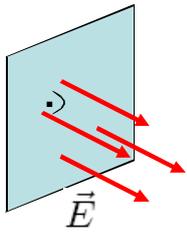
$$W = q \int_{\text{entl. Eq. pot.}} \vec{E} \cdot \vec{r} \equiv 0 \quad \text{weil } \vec{E} \perp \vec{r}$$

Beziehung zwischen Äquipotentialflächen und Feldlinien:

- Die Feldlinien schneiden die Äquipotentialflächen stets **senkrecht**
- Die Stärke von \vec{E} wird ausgedrückt durch die **Feldliniendichte** (eng beieinanderliegende Feldlinien = hohes \vec{E} -Feld)
- Man kann die Äquipotentialflächen auch als „**Höhenlinien**“ für das \vec{E} -Feld ansehen

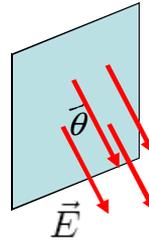


Wir betrachten eine Fläche A durch die ein elektrisches Feld tritt:



homogenes Feld
senkrecht zur Fläche:

Fluss: $\Phi = E A$



homogenes Feld
mit Winkel θ
zur Fläche:

Fluss:

$$\Phi = E A \cos \theta$$

Allgemein:

- dA sei ein (infinitesimal kleines) Flächenelement, auf dem \vec{E} als konstant angenommen wird
- $d\vec{A}$ ist der Normalenvektor senkrecht zur Fläche, mit einer Länge die der Fläche dA entspricht
- Der (skalare) Fluss durch diese Fläche ergibt sich dann aus dem Skalarprodukt:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



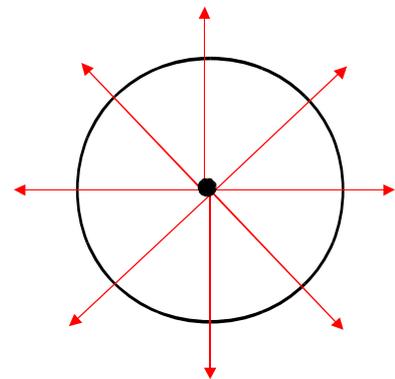
Bei einer beliebigen Fläche in einem beliebigen \vec{E} -Feld ist der **Gesamtfluss** dann:

$$\Phi_{\text{ges}} = \int_A d\Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Beispiel: Punktladung Q im Mittelpunkt einer Kugel

Feld:
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Fluss:
$$\begin{aligned} \Phi &= \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_{r=R} E(r) dA \\ &= E(R) 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

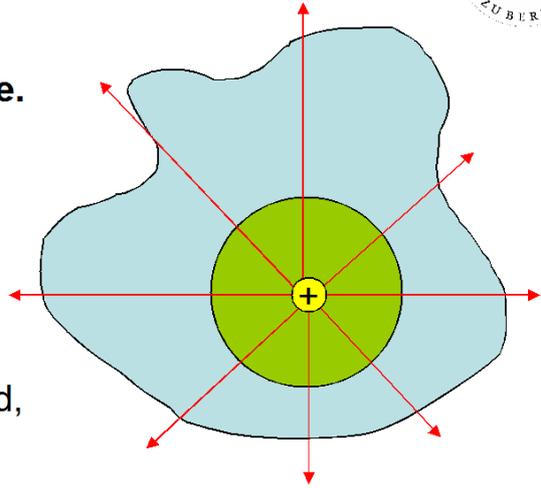


(da hier das Feld überall senkrecht zur Kugeloberfläche steht)

Dies gilt zunächst auch für eine Punktladung Q innerhalb einer **beliebigen geschlossenen Fläche**.

Betrachten wir dabei zunächst eine Kugelfläche innerhalb des Volumens.

Der Fluss durch diese Fläche ist $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$



Da außerhalb der Kugelfläche keine Ladungen sind, werden auch keine neuen Feldlinien erzeugt.

Der Fluss durch eine beliebige geschlossene Fläche ist daher ebenfalls:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Dies lässt sich noch weiter verallgemeinern:

Für eine beliebige **Ladungsverteilung** $\rho(\vec{r})$ in einem **Volumen** V gilt:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

kann man das Volumen V in (infinitesimal) kleine Teilvolumina dV zerlegen, innerhalb derer $\rho(\vec{r})$ als konstant angesehen werden kann.

Die darin enthaltene Ladung ist dann $dQ = \rho(\vec{r})dV$

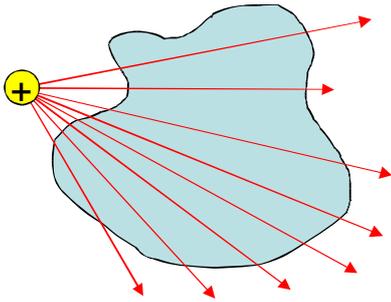
Der Fluss durch dV ist $d\Phi = \frac{dQ}{\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV$

Gesamter Fluss durch die Volumenoberfläche: $\Phi = \int_V d\Phi = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV$

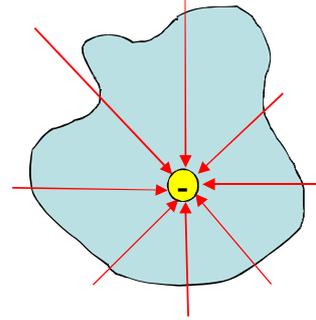
Das ist gleich der **gesamten eingeschlossenen Ladung**:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\epsilon_0}$$

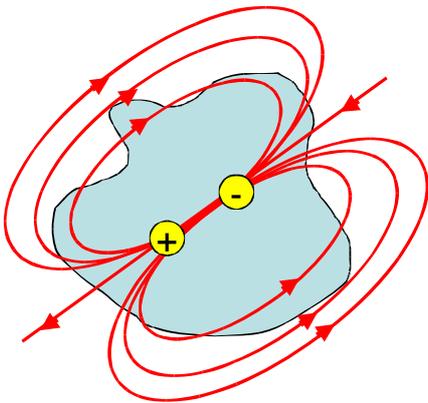
1. Ladungen außerhalb: $\Phi = 0$



2. negative Ladungen: $\Phi < 0$

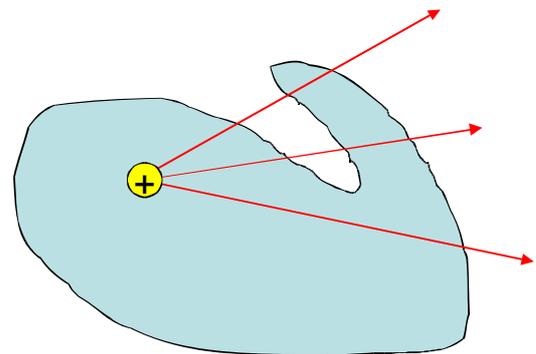


3. Dipol: $\Phi = 0$



4. Aus- & Eintritt von Feldlinien:

$$\Phi = Q / \epsilon_0$$



E-Feld-Berechnung mithilfe des elektrischen Flusses:

Beispiel 1: geladene Hohlkugel (Radius R, Ladung Q)

betrachte imaginäre Kugelschale (Radius r)
um die Kugel.

Fluss durch die Kugelschale: $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2$

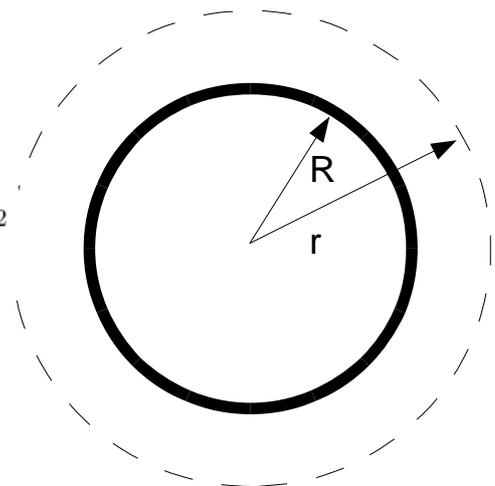
da Feldlinien senkrecht zur gedachten
Kugelfläche.

Außerdem: $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$

also ist das E-Feld außerhalb der Hohlkugel:

$$\vec{E} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

innerhalb der Hohlkugel ist $E = 0$, da dort keine Ladungen
eingeschlossen sind



Beispiel 2: Geladene Vollkugel (Ladungsdichte ρ)

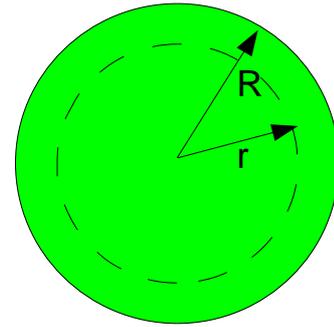
außerhalb der Kugel nach wie vor: $\vec{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

innerhalb: (1) $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2$

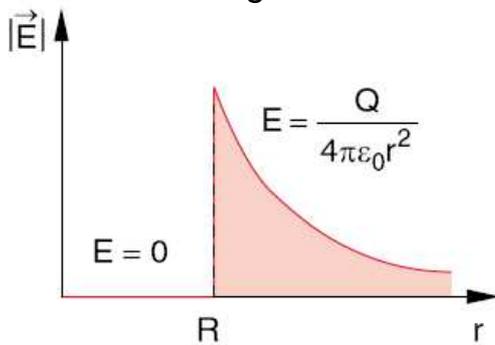
(2) $\Phi = Q_{\text{eingeschl.}} = 4\pi r^3 \rho = Q \frac{r^3}{R^3}$

also:

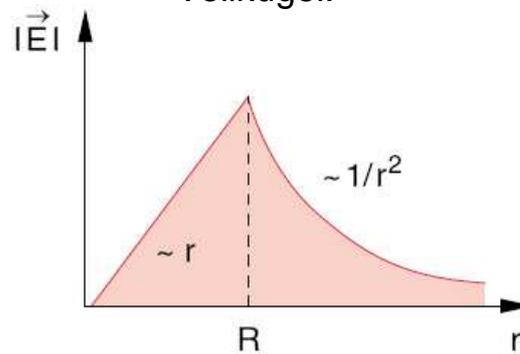
$$\vec{E}_{\text{inn.}} = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$



Hohlkugel:



Vollkugel:



[Diagramme: Demtröder]

1.7. Divergenz des elektrischen Felds

Betrachten: Fluss aus einem (infinitesimal) kleinen Würfel:

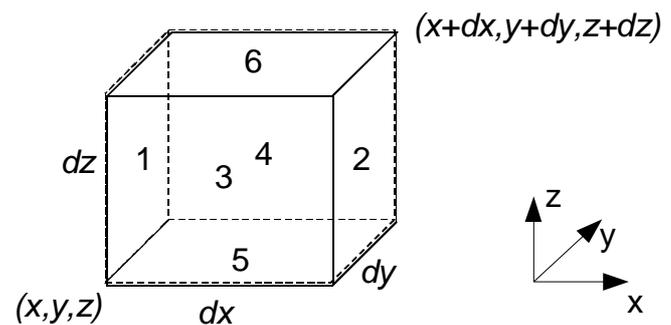
Auf den Quaderflächen:

$$\vec{E} = \text{konst.}$$

Für Flächen 1 und 2:

$$d\Phi_1 = -E_x(x, y, z) \overbrace{dy dz}^{dA_1}$$

$$d\Phi_2 = +E_x(x + dx, y, z) \overbrace{dy dz}^{dA_2}$$



mit $E_x(x + dx, y, z) = E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx$

folgt

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz$$

Analog für Flächen 3 & 4 und 5 & 6, gibt den **Gesamtfluss**

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

mit der **Divergenz**: $\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

folgt: $d\Phi = \operatorname{div} \vec{E} dV$ wobei $dV = dx dy dz$

aus diesen Würfeln können beliebige Volumina zusammengesetzt werden.

Man erhält:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{A(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \\ &= \int_V d\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{aligned}$$

Daraus kann man zwei Ergebnisse ableiten:

1. Vergleich des 2. und letzten Terms liefert: **Gaußscher Satz**

$$\int_{A(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

aus der Mathematik: gilt für Integral eines **beliebiges Vektorfelds** $\vec{v}(\vec{r})$ über eine geschlossene Fläche A.

2. Vergleich des 3. und letzten Terms liefert

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

1. Maxwell-Gleichung (im Vakuum)

Die Divergenz eines Vektorfelds beschreibt dessen Quellen und Senken, d.h. wo Fluss entsteht und verloren geht.

Bei dem elektrostatischen Feld sind dies die Ladungen, beschrieben durch $\rho(\vec{r})$

Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus ($\Phi = Q/\epsilon_0 > 0$)

und enden in negativen Ladungen ($\Phi = Q/\epsilon_0 < 0$)

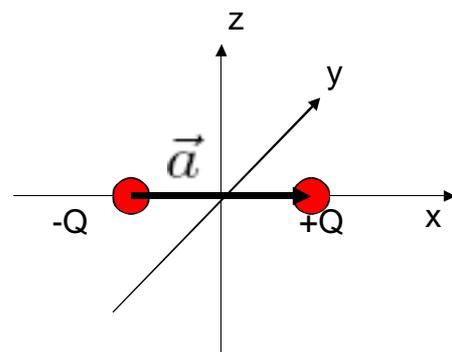
1.8. Der elektrische Dipol

- Ein **Dipol** besteht aus 2 entgegengesetzten gleichen Ladungen $Q = Q_1 = -Q_2$ im Abstand a
- Er wird charakterisiert durch sein **Dipolmoment**

$$\vec{p} = Q \vec{a}$$

Einheit $\langle p \rangle = 1 \text{ Debye} = 3,3356 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$

- Betrachten zwei Ladungen $-Q$ und $+Q$ bei $x = -a/2$ und $x = +a/2$:

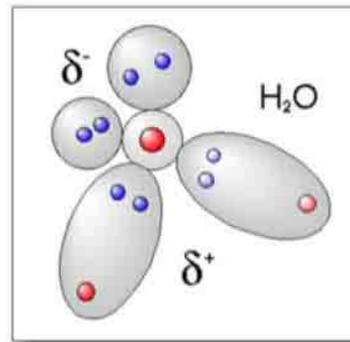


Das von diesem **Dipol** erzeugte Potential ist:

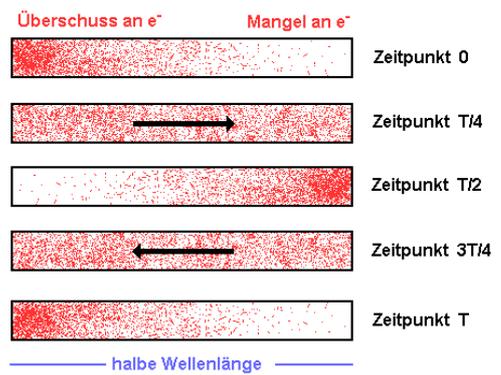
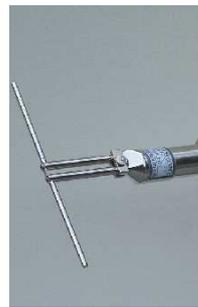
$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Beispiele für Dipole:

- Wassermolekül
(Dipolmoment $p \approx 1,8$ Debye $\approx 6 \cdot 10^{-30}$ C m
da $|Q| = 10 e$ und $d = 4$ pm)
→ Anomalie des Wassers,
hohe Wärmekapazität & Oberflächenspannung
- viele andere Moleküle:
CO₂, CO, HF, NaCl, ...

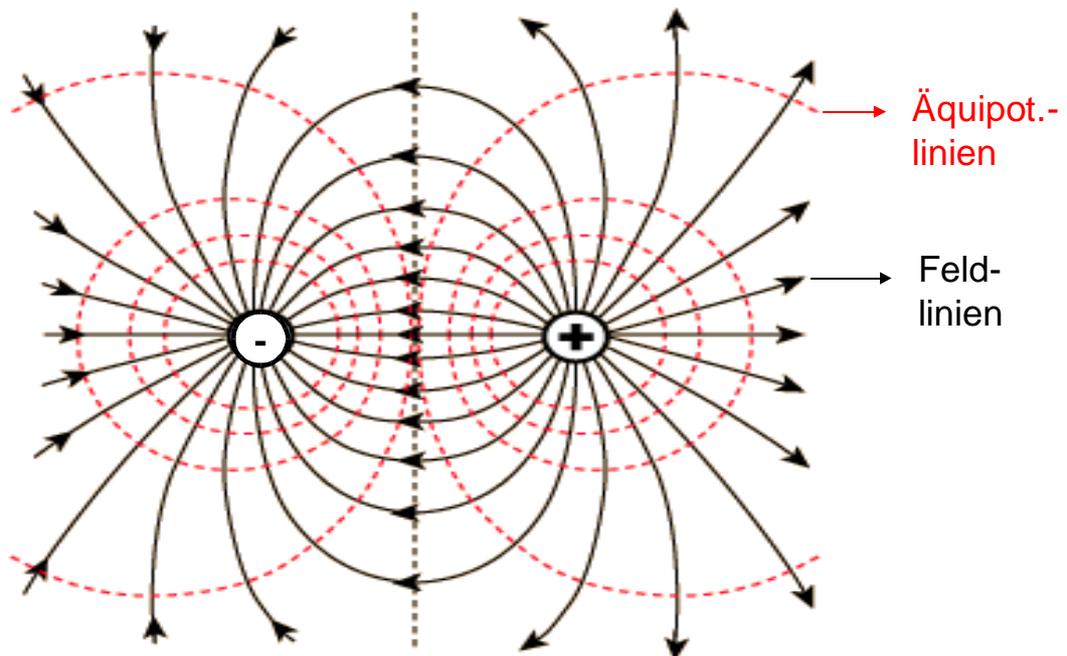


- Hertscher Dipol (~ Antenne)
- Atomare Übergänge werden durch Hertsche Dipole modelliert



Bilder: [www .atommodell.de](http://www.atommodell.de) & Wikipedia

Feld des Dipols:



Im **Fernfeld** (für große Abstände $r \gg a$) gilt näherungsweise:

$$\frac{1}{\sqrt{(x \pm a/2)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2/4 \pm ax}} \approx r \left(1 \mp \frac{ax}{2r^2} \right)$$

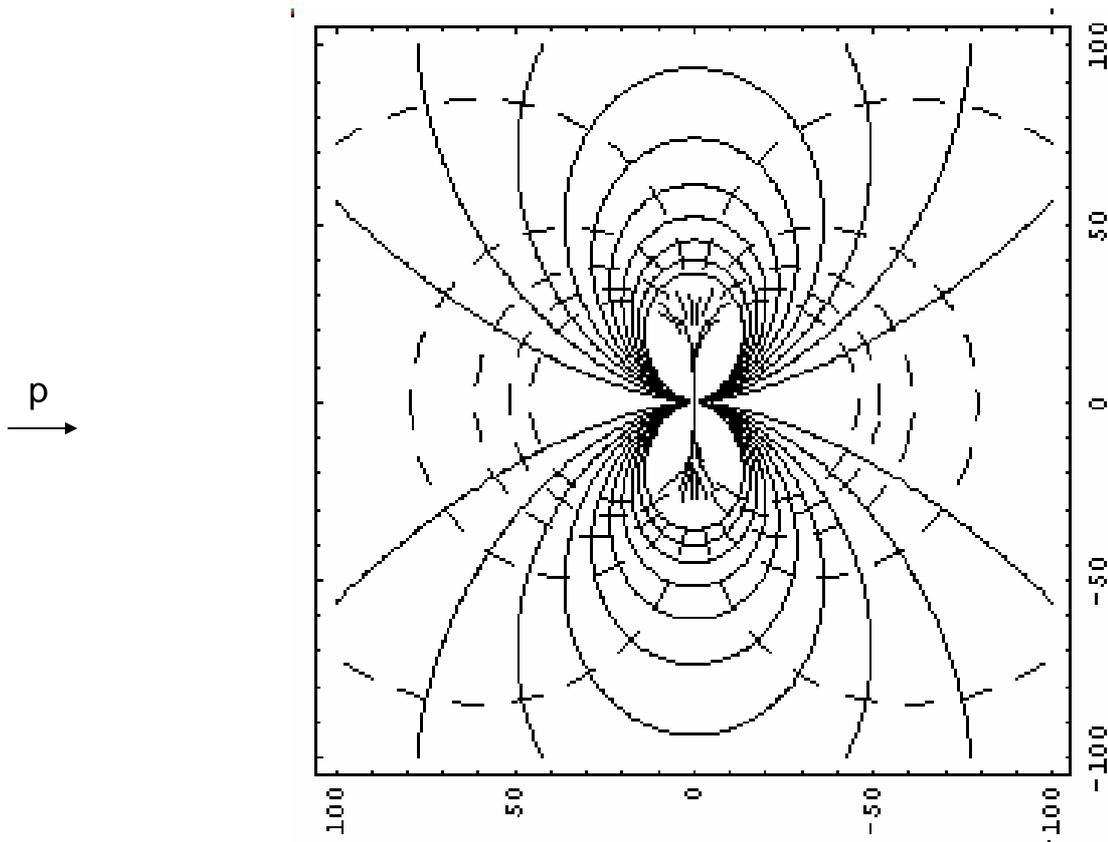
(benutzt wurde die Taylorentwicklung: $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = (1+\epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$ wenn $\epsilon \ll 1$)

Damit hat das Potential des Dipols die Form: $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{xa}{r^3}$

mit dem Dipolmoment $\vec{p} = Q \vec{a}$ ergibt das:

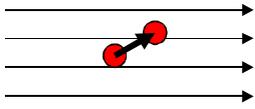
$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (\theta = \angle(\vec{r}, \vec{p}))$$

Dipol im Fernfeld: Äquipotentiallinie (---) und Feldlinien (—)



Dipol im äußeren Feld:

a) Homogenes Feld



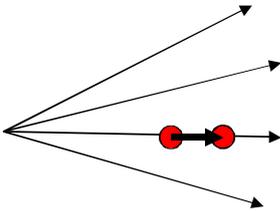
keine Translationskraft,

aber Drehmoment, wenn $\vec{p} \nparallel \vec{E}$:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}$$

→ Dipol wird ausgerichtet

b) inhomogenes Feld, z.B. das einer Punktladung

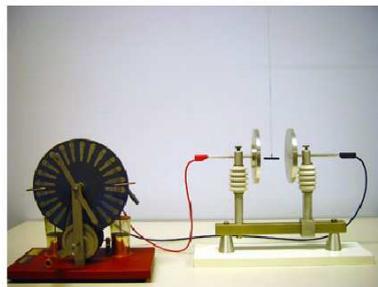


resultierende Kraft: $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$

Dipol wird ausgerichtet (s.o.) und
in Richtung wachsender Feldstärke gezogen

Versuche

- Dipol im homogenen, elektrischen Feld (Hartgummistäbchen zwischen Kondensatorplatten):

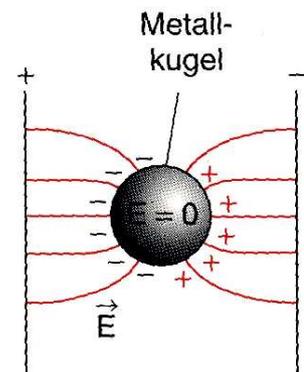
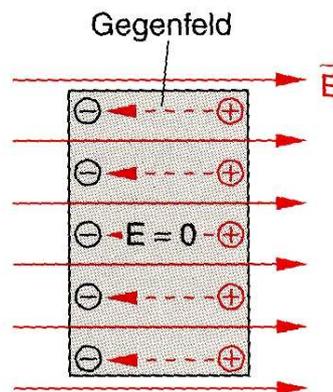


- Dipol im inhomogenen, elektrischen Feld (Wasserstrahl durch geladenen Stab abgelenkt)

- In einem elektrischen Leiter sind Ladungen frei beweglich
 - Bringt man einen Leiter in ein äußeres Feld, so wirkt auf die Ladungen die Kraft $F = q E$
 - Ladungen werden an die Oberfläche verschoben, bis im Leiter $E = 0$
- im Inneren wird ein Gegenfeld aufgebaut, welches das äußere Feld kompensiert

→ Influenz

- Leiteroberflächen sind Äquipotentialflächen
- Feld steht senkrecht zur Leiteroberfläche



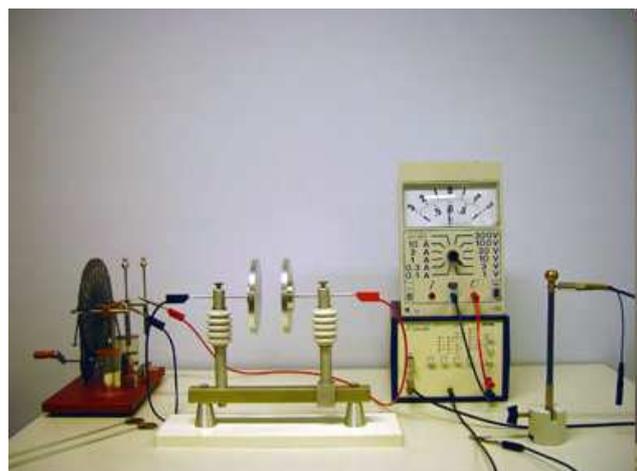
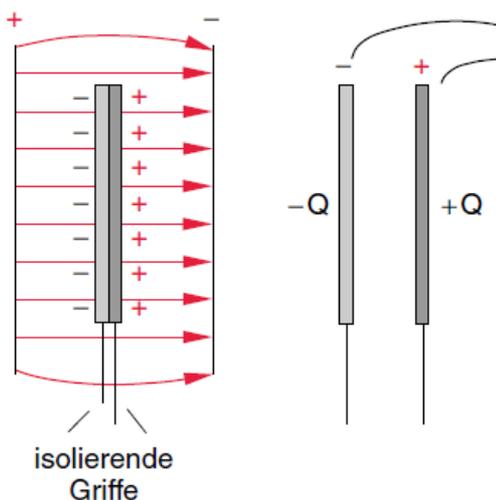
[Bild: Demtröder]

Versuch: Ladungstrennung durch Influenz

Zwei sich berührende Metallplatten werden in ein elektr. Feld (zB Kondensator) gebracht

→ Ladungstrennung durch Influenz

Werden die Platten voneinander entfernt, bleibt die Ladungstrennung erhalten, die Platten werden entgegengesetzt aufgeladen.

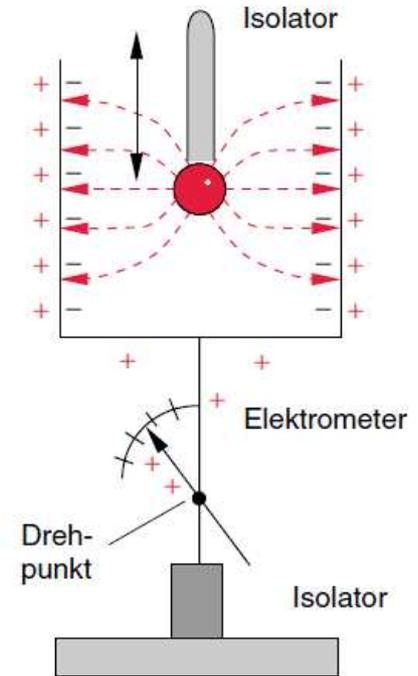
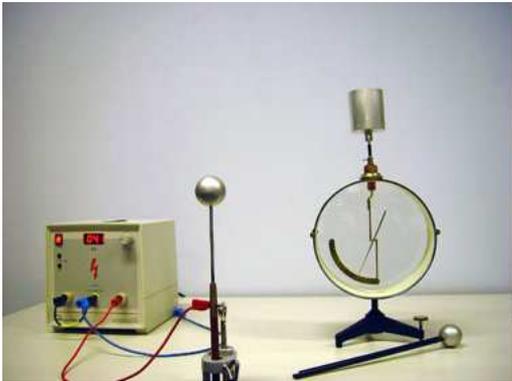


Versuch: Becherelektrometer

Ladungstrennung an Innen- und Außenwand → Elektrometer schlägt (auch ohne Berührung) aus.

(Prinzipiell) beliebiges aufladen des Bechers von Innen, da der Innenraum Feldfrei bleibt. >

Durch Berührung von außen ist dies nicht möglich.

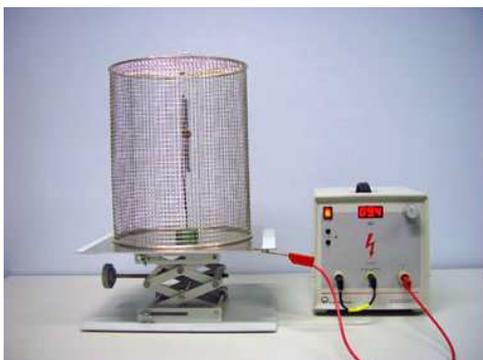


Versuch: Faradayscher Käfig

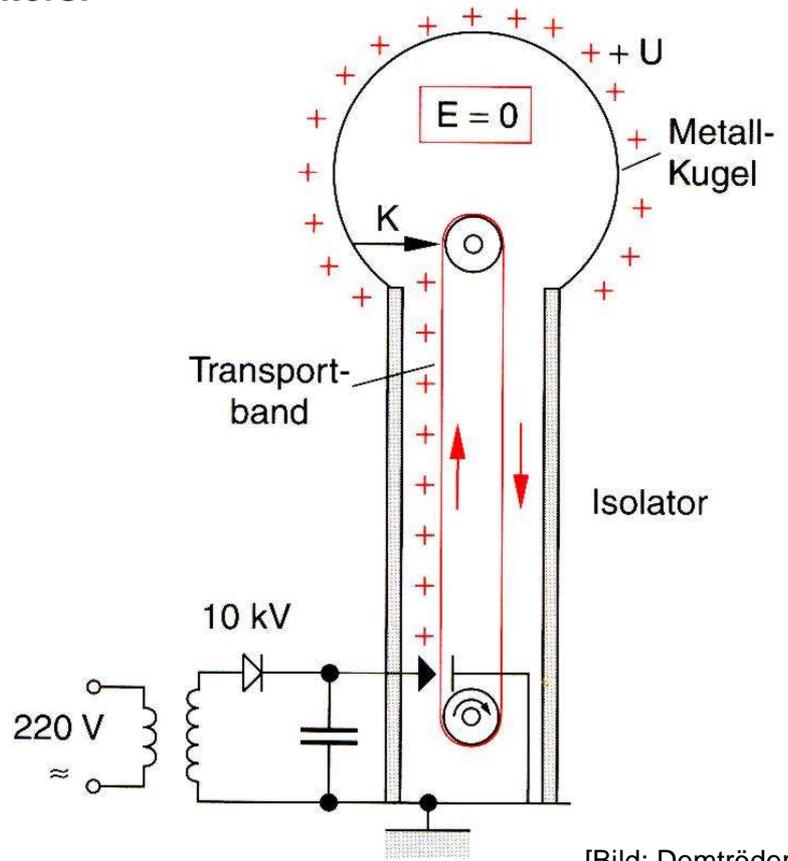
- Kein Feld innerhalb eines vom Leiter abgeschlossenen Raums
- Im Innern eines *idealen* Faradayschen Käfigs kein Funkempfang (Radio, Mobilfunk) möglich
- Schutz vor Blitzeinschlag



Deutsches Museum, München

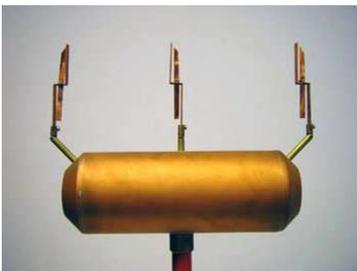


Prinzip des Van-de-Graaff-Generators:



weitere Versuche

- Influenz auf Konduktor

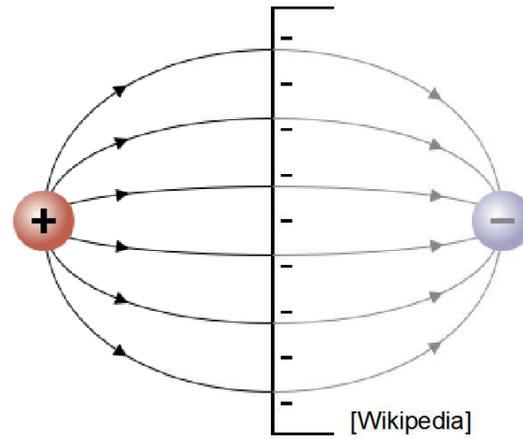


Feldfreier Raum innerhalb von Äquipotentialflächen (Feldliniengerät)



Spiegelladung vor Leiterebene:

Die durch Influenz erzeugte Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche verhält sich so, als ob eine umgekehrte Ladung $-Q$ spiegelbildlich vorhanden wäre.



Flächenladungsdichte

• Analog zur Ladungsdichte im Volumen gibt die Flächenladungsdichte die Ladung pro Flächenelement an:

$$\sigma(\vec{r}) = \left. \frac{dQ}{dA} \right|_{\vec{r}}$$

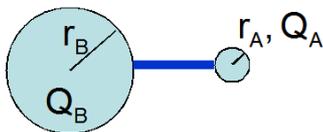
• Einheit $[\sigma] = 1 \text{ C} / \text{m}^2$

• Auf der Leiteroberfläche:

$$\sigma(\vec{r}) = \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r}_{\text{Oberflaeche}})|$$

Elektrischer Durchschlag:

- E-Feld kann an Leiterspitzen extrem groß werden
- Modell einer Spitze:

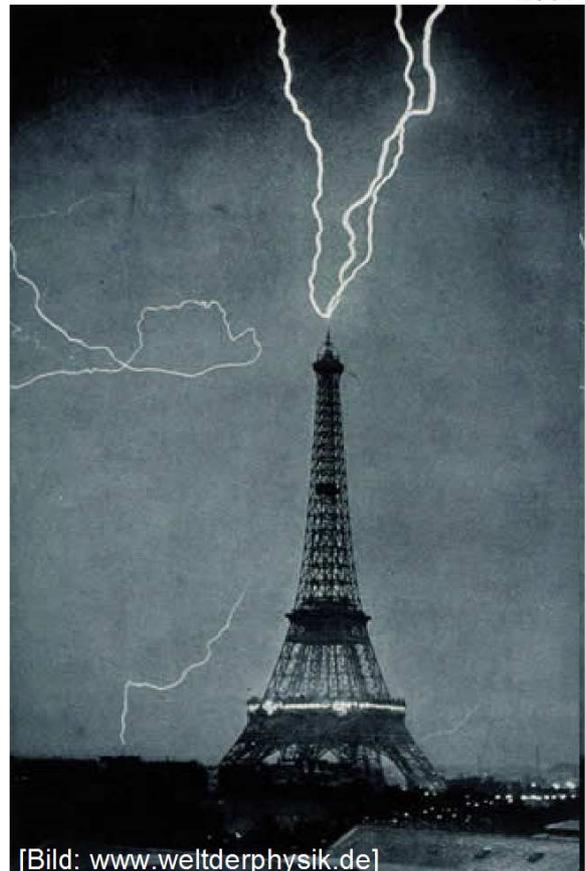


- Oberfläche beider Kugeln muss Äquipot.fläche sein:

$$\phi_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A} \equiv \phi_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

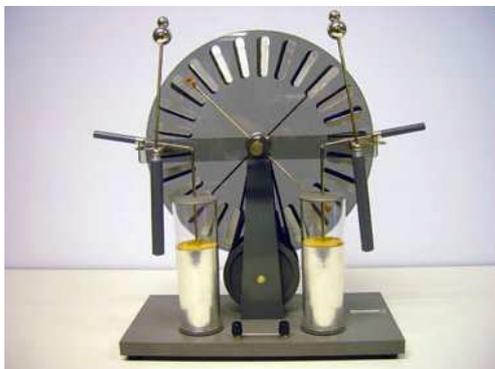
- Andererseits:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A/(4\pi r_A^2)}{Q_B/(4\pi r_B^2)} = \frac{r_B}{r_A}$$



- **Durchschlag:** Feld so hoch, dass Luft nicht mehr isoliert, Stoßionisation, Elektronen- oder Ionenlawine
- Auch im Vakuum: direkte Auslösung von Elektronen

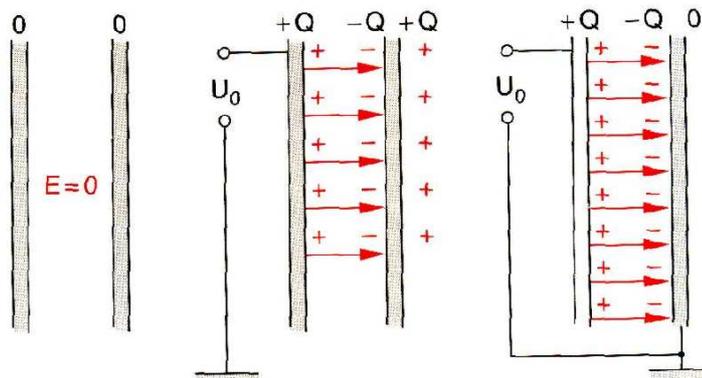
Versuch: Influenzmaschine



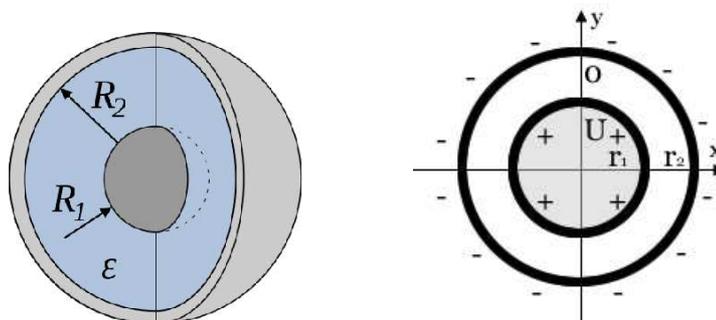
1.10. Kapazität und Kondensatoren

Anordnung aus zwei entgegengesetzt geladenen Leiterflächen: **Kondensator**

Beispiel: Plattenkondensator



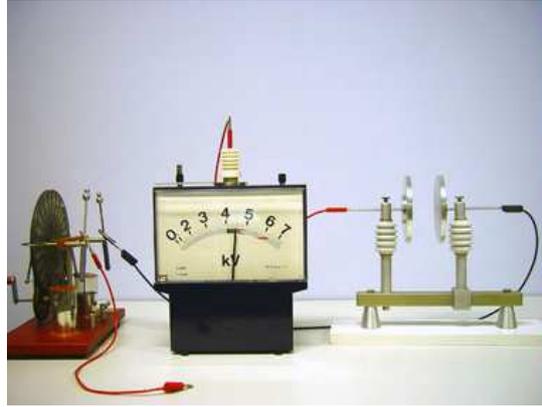
Beispiel: Kugelkondensator



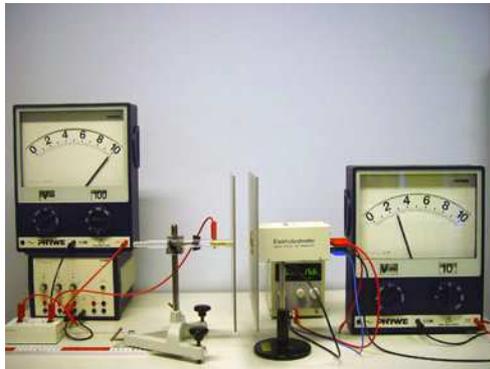
1. Leidener Flasche



2. Ladung im Plattenkondensator



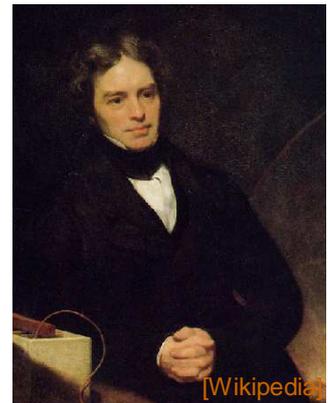
3. Feldstärke im Plattenkondensator / Abstandsänderung



- **Potential bzw. Spannung** auf einem Leiter gegen Unendlich (Erde) ist der **Gesamtladung proportional** (Überlagerungsprinzip):

$$Q = C U$$

- C heißt **Kapazität**.
- Einheit: $[C] = 1 \text{ Coulomb} / \text{Volt} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$
- Typische Werte für Kondensatoren: $\sim \text{pF} - \mu\text{F}$



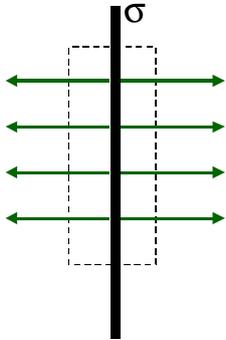
Michael Faraday

Beispiel: Metallkugel mit Radius R (Kugulkondensator)

$$U = \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \Rightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0 R$$

a) Plattenkondensator

einzelne, ausgedehnte,
geladene Ebene:

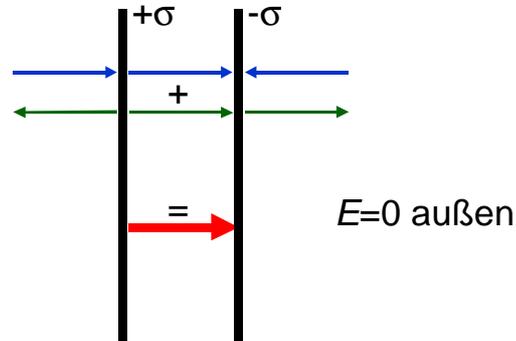


$$\Phi = EA + EA \equiv \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

homogenes Feld

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

2 entgegengesetzt geladene Platten
(Plattenkondensator):



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \quad \text{innen}$$

Potential des homogenen Felds:

$$-\frac{d\phi}{dx} = E \quad \Rightarrow \quad U = \phi(0) - \phi(x) = Ex$$

mit Plattenabstand d und Plattenfläche A ,
und wenn man Randeffekte vernachlässigt ($d^2 \ll A$):

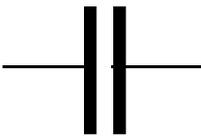
Spannung zwischen den Platten: $U = E d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$

Bei gegebener Spannung U nimmt Feldstärke E wie $1/d$ zu.

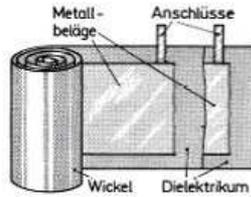
Kapazität des Plattenkondensators: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

Kleine Abstände und große Flächen geben hohe Kapazitäten!

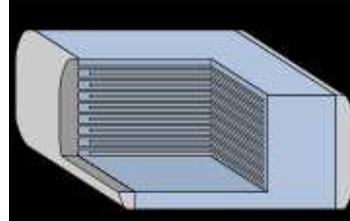
Kondensatoren in der Elektrotechnik:

Symbol: 

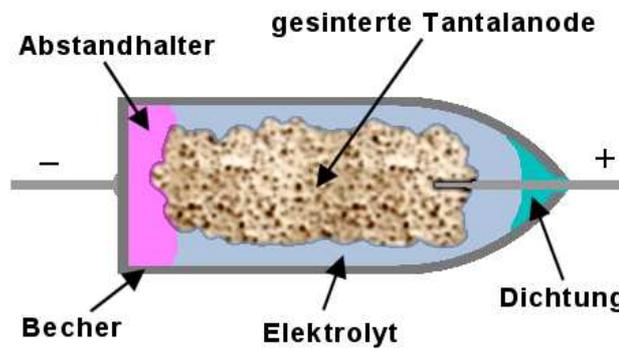
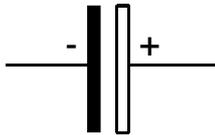
Wickelkondensatoren:



Vielschichtkondensatoren:



Elektrolytkondensator (Elko):



Bilder:
Wikipedia &
edufish-physik.blogspot.com

b) Kugulkondensator

$r_1 < r < r_2$: Potential einer Punktladung im Kugelmittelpunkt:

$$\phi_{\text{innen}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

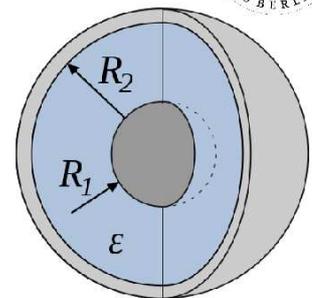
außerhalb & innerhalb: wegen $Q_{\text{ges}} = 0$ ist $E = 0$ und $\phi = \text{konst.}$

Spannung zwischen den Kugelflächen: $U = \phi(r_1) - \phi(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

Kapazität: $C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

für kleine Plattenabstände $d = r_2 - r_1 \ll r_i$: $C \approx \frac{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}^2}{d} = \frac{\epsilon_0 \bar{A}_{\text{Kugel}}}{d}$

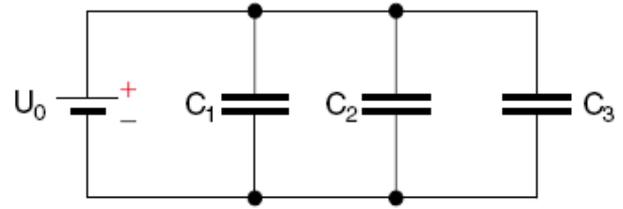
(analog zu Plattenkondensator)



c) Parallelschaltung von Kondensatoren

Schaltet man mehrere Kondensatoren **parallel**,
 → dieselbe Spannung an allen Kondensatoren
 → die Ladungen addieren sich

→ **Gesamtkapazität:** $C = \sum_i C_i$



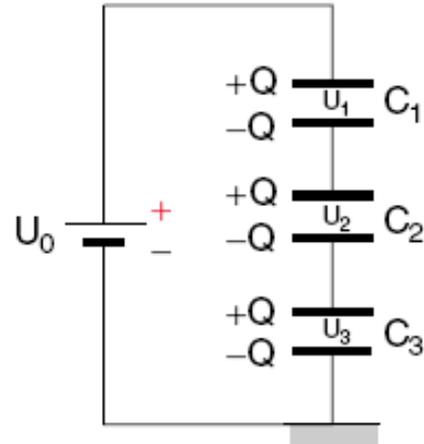
d) Hintereinanderschaltung von Kondensatoren

• Ladungen werden getrennt, so dass auf den verbundenen Platten entgegengesetzte Ladungen sitzen.

• Spannungen zw. den mit Leitern verbundenen Platten ist null

• Die Spannungen verhalten sich additiv

→ **Gesamtkapazität:** $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$



Versuch: Reihen - u. Parallelschaltung von Kondensatoren

1.11. Energie des elektrischen Felds

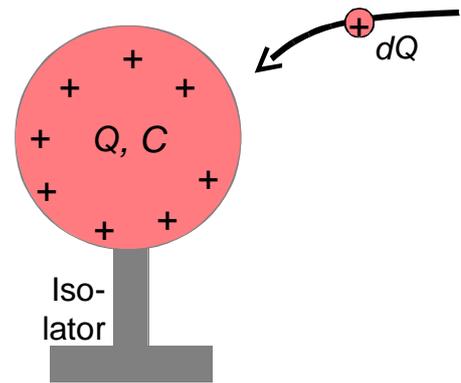


Aufladen einer isolierten leitenden Kugel mit kleinen Ladungsportionen dQ :

Aufzuwendende Arbeit:

$$dW = dQ[\phi(R) - \phi(\infty)] = U dQ = \frac{Q}{C}dQ$$

Gesamtarbeit:
$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C}dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



Ein Kondensator der auf die Spannung U aufgeladen wurde, enthält die **Energie**

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$



speziell Plattenkondensator:

da $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ und $U = E d$

hat der Plattenkondensator die Energie (V : Volumen)

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

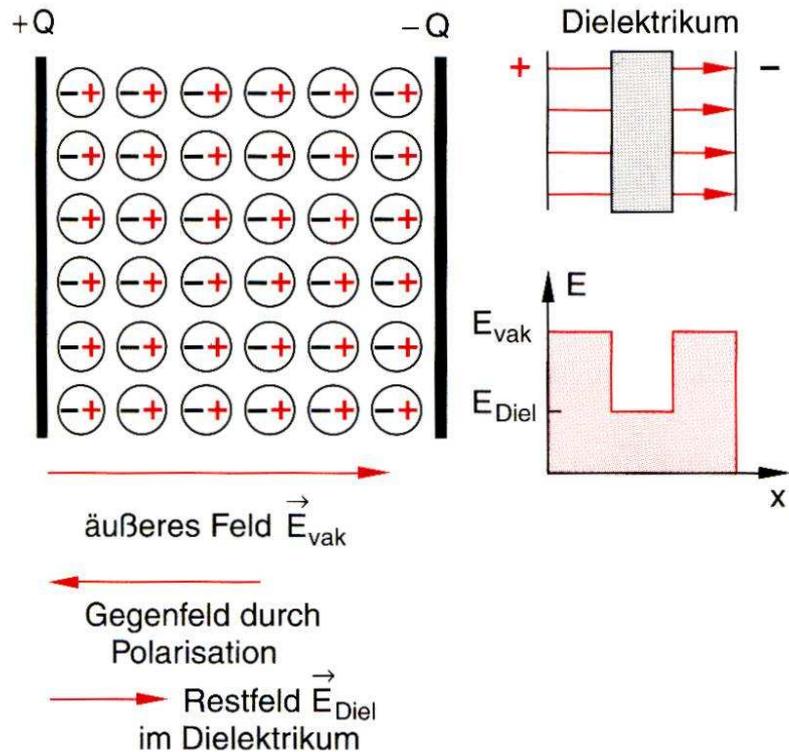
die **Energiedichte** (Energie pro Volumen) des E-Feldes ist dann

$$w_{el} \equiv \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Dieses Ergebnis gilt für **beliebige elektro-statische Felder!**

Dielektrikum zwischen zwei Kondensatorplatten:

- wie bei Influenz:
Ladungsverschiebung
- **Dielektrika = Isolatoren:**
Elektronen fest an
Atomrümpfe gebunden
- keine *freien* Ladungen,
nur Verschiebung innerhalb
des Atoms/Moleküls
- **Gegenfeld** durch
Polarisation/
induzierte Dipole
- Gesamtfeld wird reduziert

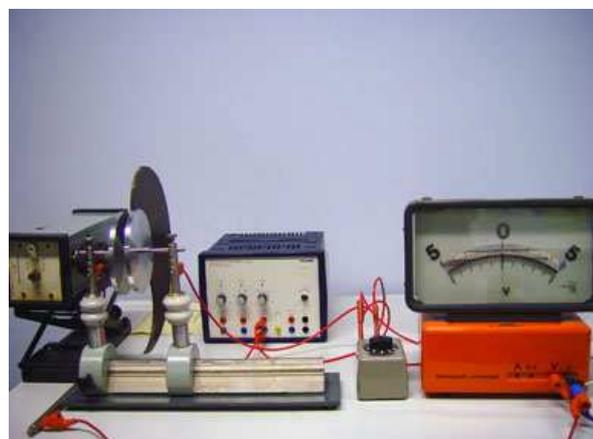
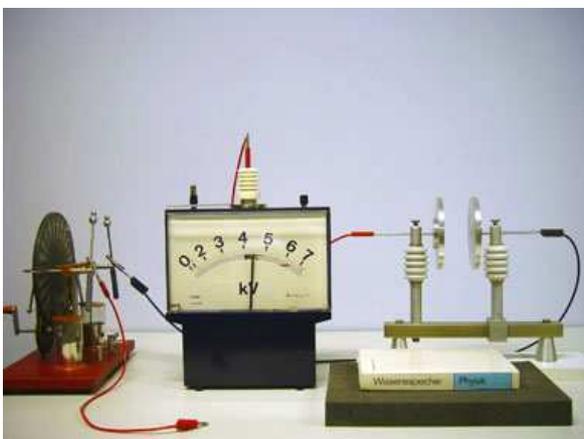


[Bild: Demtröder]

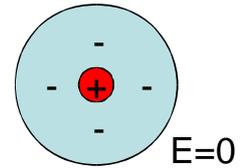
Versuche:

Dielektrikum im Plattenkondensator

Rotierendes Dielektrikum im Plattenkondensator



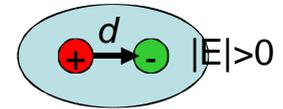
Im Atom/Molekül: Verschiebung der Ladungsschwerpunkte
um d induziert Dipolmoment $\vec{p} = q \vec{d}$



Vektorsumme aller Dipolmomente pro Volumen:

Polarisation
$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

bei Vernachlässigung anderer (zB. thermischer) Ww. sind alle
Dipole parallel ausgerichtet.

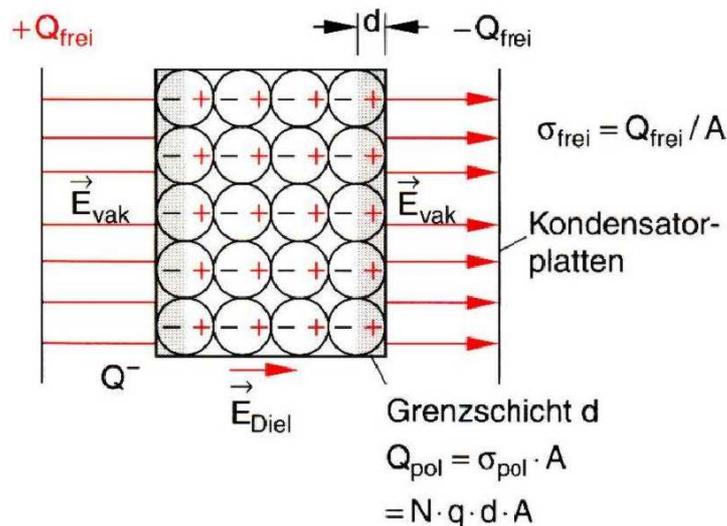


Mit Dipoldichte $N = (\text{Anzahl Dipole}) / (\text{Volumen})$:

$$P = Np$$

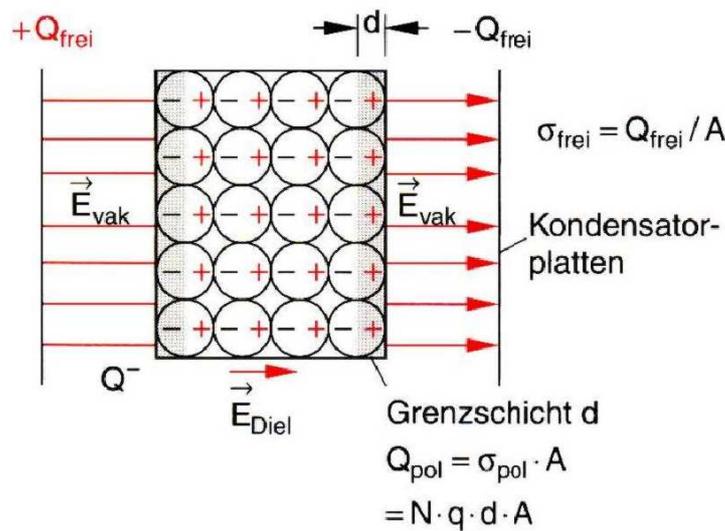
Bei kleinen Auslenkungen ist $d \propto E$ und somit auch $p = \alpha E \propto E$

α heißt **Polarisierbarkeit**



- Ladungsverschiebung \rightarrow Ladungen an den Oberflächen des Dielektrikums
- Im Inneren kompensieren sie sich \rightarrow Gesamt-Ladungsdichte = 0
- Mit Oberflächen-Ladungsdichte σ_{pol} :

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{pol}}}{A} = \frac{NqdA}{A} = P$$



- Vakuum-Feld: erzeugt durch **freie Ladungen** auf den Kondensatorplatten:

$$E_{\text{vac}} = \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\epsilon_0}$$

- Die Feldstärke wird im Dielektrikum also verringert:

$$\vec{E}_{\text{diel}} = \frac{\sigma_{\text{frei}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \vec{E}_{\text{vac}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

- Da Dipolmoment $\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{diel}}$ proportional zur Feldstärke ist, gilt analog
- Polarisation proportional Feldstärke:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_{\text{diel}}$$

und damit

$$\vec{E}_{\text{diel}} = \frac{1}{1 + \chi} \vec{E}_{\text{vac}} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_{\text{vac}}$$

χ ist die **dielektrische Suszeptibilität**,
 $\epsilon = \chi + 1$ die **Permittivität** oder
 relative Dielektrizitätskonstante

Anmerkungen:

1. beide Größen sind **einheitenlos**: $[\chi] = [\epsilon] = 1$
2. die Proportionalität gilt **nicht mehr** für **sehr hohe Feldstärken**

E ist also im Dielektrikum um $1/\varepsilon$ kleiner, als im Vakuum,
somit auch die Spannung U

→ die Kapazität des Kondensators steigt dadurch um Faktor ε :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d}$$

Generell gilt in den allermeisten Fällen im Dielektrikum:

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$$

einige Beispiele:

- Vakuum $\varepsilon = 1$
- Luft $\varepsilon = 1,0006$
- Papier $\varepsilon \approx 1 - 4$
- Glas $\varepsilon \approx 5 - 10$
- Wasser $\varepsilon \approx 80$
- Keramiken ε bis ca. 10 000

Dielektrische Verschiebung: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{diel}} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_{\text{diel}}$

Einheit [D] = [$\epsilon_0 E$] = 1 A s / m² = 1 C / m²

\vec{D}/ϵ_0 ist also das Feld, „wie es ohne Dielektrikum wäre“

Im Vakuum: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{vac}}$

Die **1. Maxwell-Gleichung im Medium** (mit ϵ) wird dann zu:

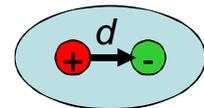
$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \rho$$

oder

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Elektrische Energiedichte im Dielektrikum:

Erinnerung: Energiedichte im Vakuum: $w_{\text{el}}^{\text{vac}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$



zusätzlich: Energie für die Ladungsverschiebung in den Atomen gegen die rücktreibende Kraft $\vec{F} = -k\vec{x} = Q\vec{E}$

→ Energie pro induziertem Dipol (mit $k = Q E / d$)

$$W_{\text{dip}} = - \int_0^d \vec{F} \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} Q E d = \frac{1}{2} p E$$

für Dipoldichte N (Anz. Dipole / Vol.) ist die zusätzliche Energiedichte durch das Dielektrikum:

$$w_{\text{el}}^{\text{diel}} = \frac{N}{V} W_{\text{dip}} = \frac{1}{2} N p E = \frac{1}{2} P E = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon - 1) E^2$$

→ **Gesamte Energiedichte im Dielektrikum:**

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2} E D$$

Versuch: Plattenkondensator in Küvette mit Öl

legt man eine Spannung an, so steigt das Öl im Kondensator, bis die mechanische Hubarbeit gleich der im System gespeicherten elektrischen Feldenergie ist.

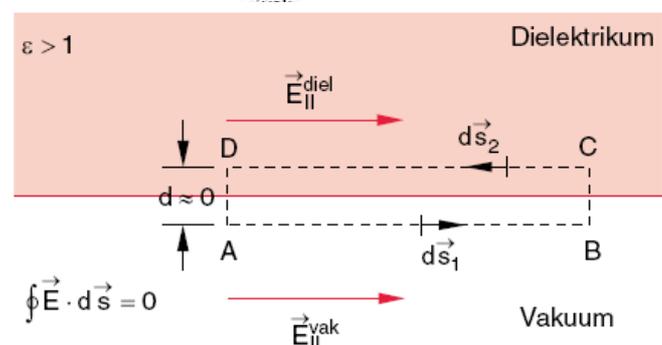
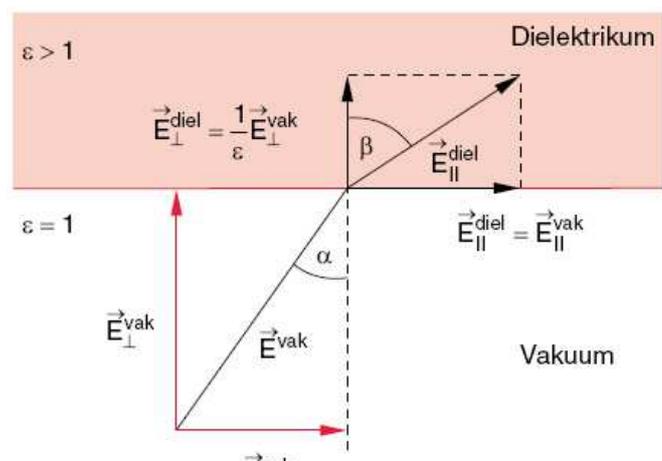


Grenzflächen zwischen Dielektrikum und Vakuum

- zerlege Feldvektor in Komponente senkrecht und parallel zur Grenzfläche: \vec{E}_\perp , \vec{E}_\parallel
- bilde „virtuellen“ Pfad ABCD mit geringer Dicke (\rightarrow Anteile von AD & CB vernachlässigbar)
- Energieerhaltung: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
- also:

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_A^B \vec{E}_\parallel^{\text{vac}} \cdot d\vec{s}_1 + \int_C^D \vec{E}_\parallel^{\text{diel}} \cdot d\vec{s}_2$$



weil $d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_2$

folgt $\vec{E}_{\parallel}^{\text{vac}} = \vec{E}_{\parallel}^{\text{diel}}$

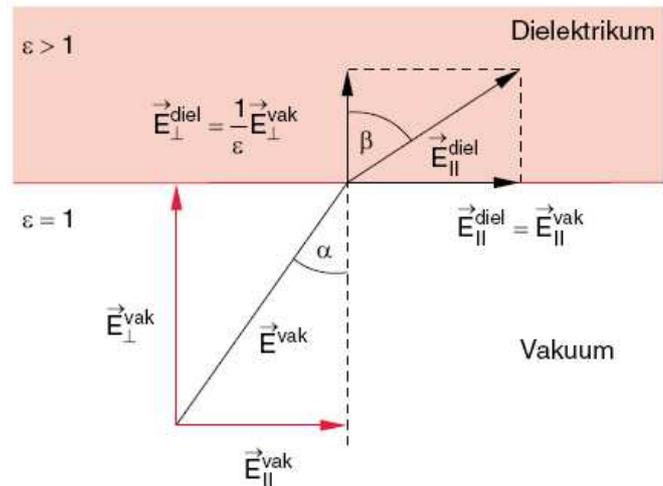
d.h. die **Parallelkomponente des elektrischen Felds bleibt an einer Grenzfläche erhalten.**

analog gilt für die **Normalkomponenten der Verschiebungsdichte:**

$$\vec{D}_{\perp}^{\text{vac}} = \vec{D}_{\perp}^{\text{diel}}$$

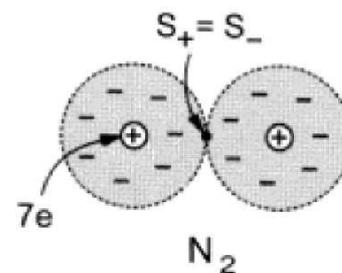
Man findet folgendes **Brechungsgesetz für die Feldlinien:**

$$\tan \beta = \frac{\vec{E}_{\parallel}^{\text{diel}}}{\vec{E}_{\perp}^{\text{diel}}} = \epsilon \frac{\vec{E}_{\parallel}^{\text{vac}}}{\vec{E}_{\perp}^{\text{vac}}} = \epsilon \tan \alpha$$



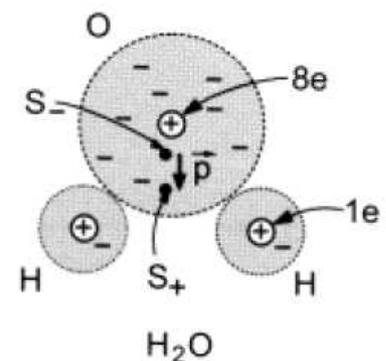
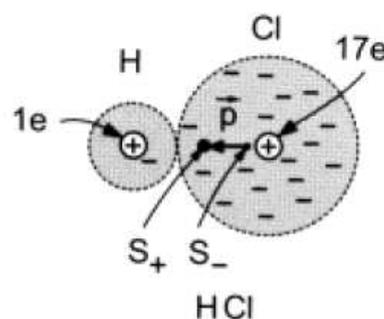
Bisher: **Dielektrika**

(ohne Feld keine Dipole induziert)



Paraelektrika:

besitzen permanente Dipole, die im Feld ausgerichtet werden



Ferroelektrika: Permanente Dipole in kristallinen Systemen, P kann durch äußeres Feld umgepolt werden (Hysterese)

Pyroelektrika: Erwärmung erzeugt Polarisierung, gegenüberliegende Flächen laden sich auf

Versuch Pyroelektrizität

Piezoelektrika: Polarisierung durch mechanische Spannung

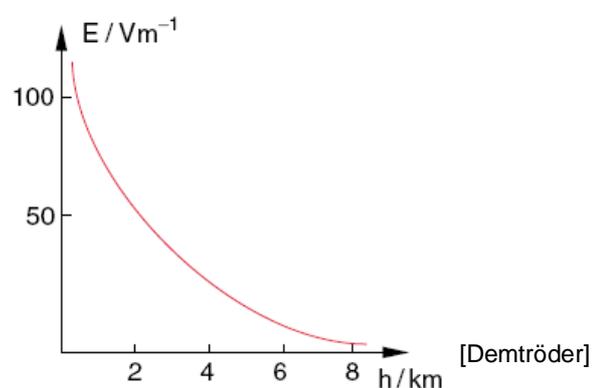
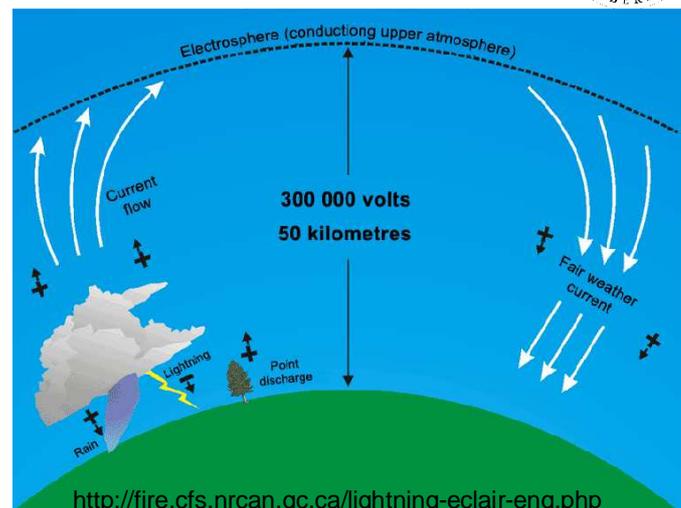
Versuch Piezoelektrizität

Animation: Wikipedia

1.13 Einige elektrostatische Phänomene

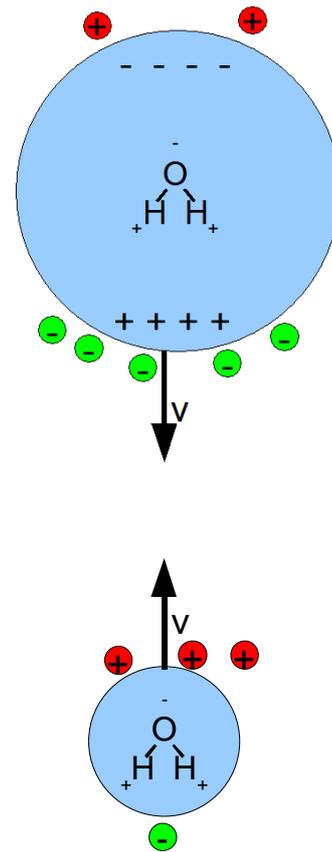
Elektrisches Feld der Erdatmosphäre:

- Erdoberfläche besitzt eine elektrische Überschussladung von (im Mittel) $Q = -6 \cdot 10^5 \text{ C}$. Entsprechend existieren positive Ladungsträger (Ionen) in der höheren Atmosphäre (Ionosphäre)
- Ionen entstehen durch kosmische Strahlung/Sonnenwind
- Positiv ionisierte Teilchen im Feld werden Richtung Erde beschleunigt, Negative von der Erde weg beschleunigt.
→ ständiger Strom von ca. 1000 A
→ Entladung
- Ladungstrennung durch vertikale Windströmungen & Blitze



Entstehung von Gewitter

- Durch Zusammentreffen warmer & kalter Luftmassen entstehen starke vertikale Luftströmungen, die elektrisch geladene Partikel (Wassertropfen, Staub, Eis) transportieren und so hohe Spannungen in der Wolke aufbauen
- Dipolmoment in den Wassermolekülen richtet sich im Erdfeld aus
- **große Tropfen**, die **nach unten** fallen sammeln verstärkt **negative Ionen** an ihrer Unterseite auf
- bei **kleinen Tropfen**, die **nach oben** getrieben werden, sind das verstärkt **positive Ionen**



Blitze

- Bei hinreichend hoher Ladungstrennung (Potentialunterschiede von einigen MV) → elektrischer Durchschlag = Blitz
- Transport von einigen C innerhalb weniger ms → Ströme von einigen 10 – 100 kA
- Einem Blitz gehen **Vorentladungen** voraus, die durch Stoßionisation elektrisch leitende Kanäle schaffen
- **Hauptentladung** (eigentlicher Blitz) nach Bildung eines geschlossenen Blitzkanals

Kugelblitze?

- kugelförmige Leuchterscheinungen, die manchmal in der Nähe eines Gewitters beobachtet werden
- Bislang nur Augenzeugenberichte → bislang keine Wissenschaftliche Bestätigung
- Experimentelle Beobachtungen von **ähnlichen** Phänomenen (zB. Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik & HUB)